PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

LOGARITMOS

TEOREMAS-FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

LOGARITMOS

Logaritmos

Definición:

$$\log_b N = y \Leftrightarrow b^y = N$$

Donde:

N : Número $(N > 0)$

b : Base $(b > 0 \ \wedge \ b \neq 1)$

y : Logaritmo de N en base b $(y \in \mathbb{R})$

Propiedad:

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b 1 = 0$$

Identidad fundamental

$$b^{\log_b x} = x$$

$x > 0$ y $b > 0 \ \wedge \ b \neq 1$

LOGARITMOS

Teoremas

Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $(b > 0 \wedge b \neq 1)$

1. $\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b x^{n} = n \log_b x$

En general $\log_{b^m} x^{n} = \frac{n}{m}.\log_b x$

Consecuencias:

$\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$

- $\log_8 3 = \frac{1}{\log_3 8}$
- $\frac{1}{\log_9 4} = \log_4 9$

$\log_b a.\log_a x = \log_b x$

- $\log_2 7.\log_7 32 = \log_2 32$
  $= 5$

5. **Regla del intercambio**

$x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

LOGARITMOS

SISTEMA DE LOGARITMOS

Sistema decimal (Briggs)

Es aquel sistema de logaritmos en donde la base es 10.

Notación: $\log_{10} x = \log x$

Ejemplo:

- $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$
- $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
- $10^{\log 5} = 5$

Sistema de Logaritmo Natural

Es aquel sistema de logaritmos en donde la base es el numero e.

Notación: $\log_e x = \ln x$

Ejemplo:

- $\log_e 10 = \ln 10$
- $\log_e e = 1$
- $e^{\log_e 5} = 5$

LOGARITMOS

Nota:

$$i)\ \log_b^n x = (\log_b x)^n$$

$$ii)\ \log_b x^n \neq \log_b^n x$$

COLOGARITMO

Definición

$$\operatorname{colog}_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\operatorname{colog}_b N = -\log_b N$$

ANTILOGARITMO

Definición

$$\operatorname{antilog}_b x = b^x$$

Propiedades

$$\log_b(\operatorname{antilog}_b N) = N$$

$$\operatorname{antilog}_b(\log_b N) = N$$

LOGARITMOS

Función exponencial

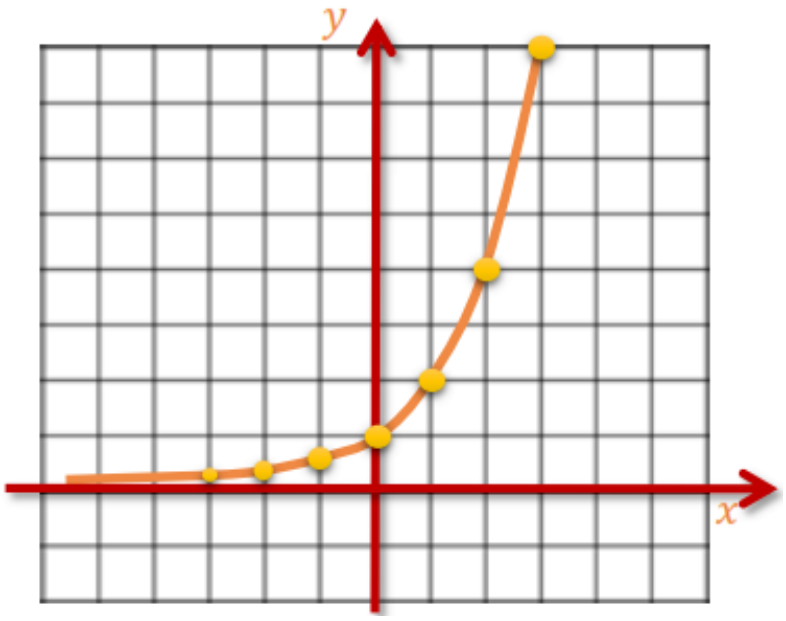
Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función exponencial se define como $f_{(x)} = b^x$

$\text{Dom} f = \mathbb{R} \wedge \text{Ran} f = \mathbb{R}^+$

Ejemplo: $f_{(x)} = 2^x; \quad x \in \mathbb{R}$

Tabularemos algunos puntos para inducir la gráfica

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$1/2$
-2	$1/4$
-3	$1/8$



Función creciente

Ejemplo: $f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad x \in \mathbb{R}$

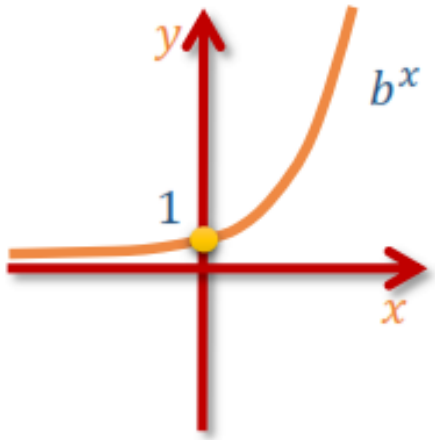
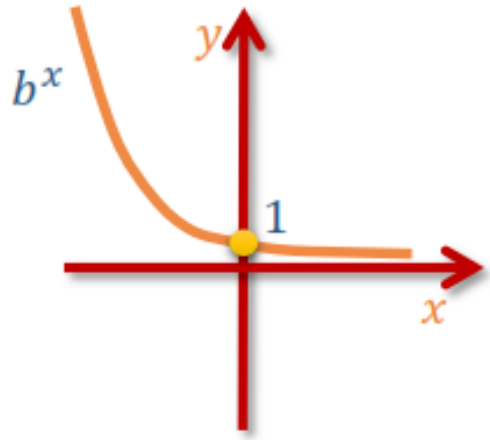
Tabularemos algunos puntos para inducir la gráfica

x	y
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$
-1	2
-2	4
-3	8

Función decreciente

LOGARITMOS

En general: Sea $f_{(x)} = b^x$; $b \neq 1 \wedge b > 0$

$b > 1$	$0 < b < 1$
	
Ambas funciones son inyectivas	
$b^x = b^y \leftrightarrow x = y$	
Función creciente	Función decreciente
$b^x < b^y \leftrightarrow x < y$	$b^x < b^y \leftrightarrow x > y$
No cambia el sentido de la desigualdad	**Si cambia** el sentido de la desigualdad

LOGARITMOS

Función logarítmica

Toda función exponencial $f_{(x)} = b^x$ con $b > 0$ y $b \neq 1$ (por ser inyectiva) posee inversa f^{-1}, llamada función logarítmica con base b y denotada con $\log_b$, por lo tanto se cumple que

$$f^{-1}_{(x)} = y \leftrightarrow x = f_{(y)}$$

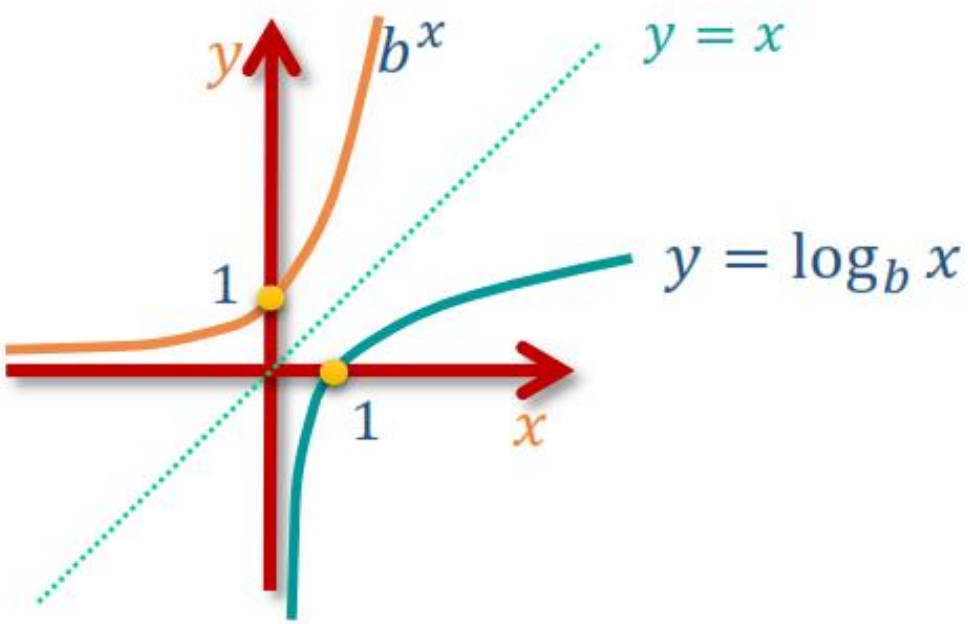
Es decir

$$\log_b x = y \leftrightarrow x = b^y$$

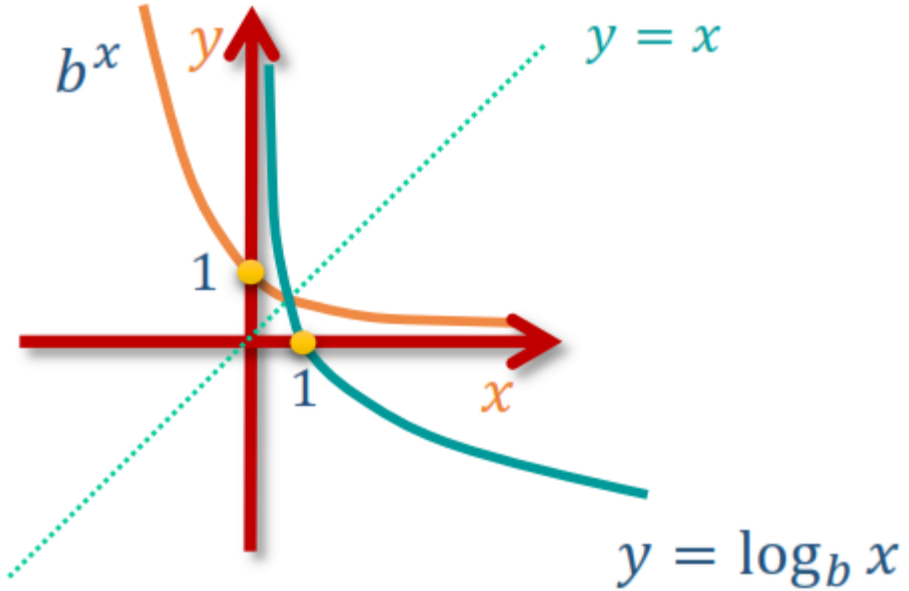
Gráfica de una función logarítmica

Podemos demostrar la gráfica de una función logarítmica usando la propiedad de la gráfica de la función inversa

Si $b > 1$

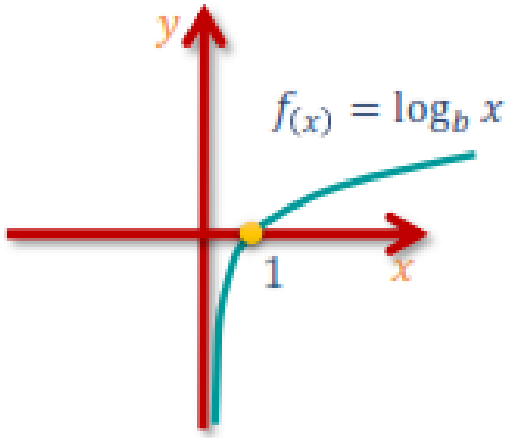
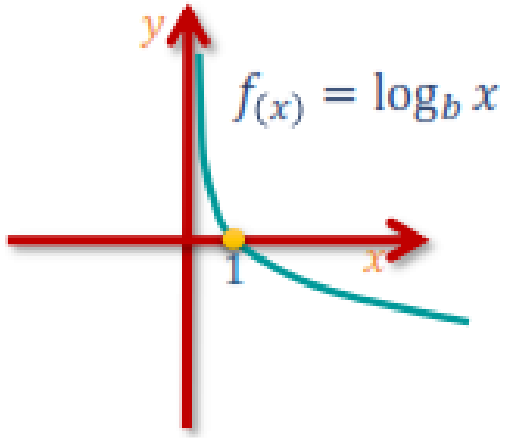


Si $0 < b < 1$



LOGARITMOS

Sea $f_{(x)} = \log_b x$; $b \neq 1 \wedge b > 0 \wedge x > 0$

$b > 1$	$0 < b < 1$
	
Ambas funciones son inyectivas	
$\log_b x = \log_b y \leftrightarrow x = y$	
Función creciente	Función decreciente
$\log_b x < \log_b y \leftrightarrow x < y$	$\log_b x < \log_b y \leftrightarrow x > y$
No cambia el sentido de la desigualdad	**Si cambia** el sentido de la desigualdad

Ecuaciones logarítmicas

Son las ecuaciones donde la variable se encuentra afectado del logaritmo

Ejemplos:

- $\log_3(x-1) = \log_3(7-x)$
- $\log_2(x^2-1) = 3$
- $\log_5 x = 2 - x$

Para su resolución, se debe tener en cuenta los pasos siguientes:

Paso1	Garantizar la existencia de los logaritmos en los reales $\log_b A \in \mathbb{R} \leftrightarrow b > 0 \ \wedge b \neq 1 \wedge A > 0$
Paso2	Despejar x: $\log_b x = \log_b y \leftrightarrow x = y$
Paso3	Intersectar los resultados anteriores

LOGARITMOS

Inecuaciones logarítmicas

Son las inecuaciones donde la variable se encuentra afectado del logaritmo

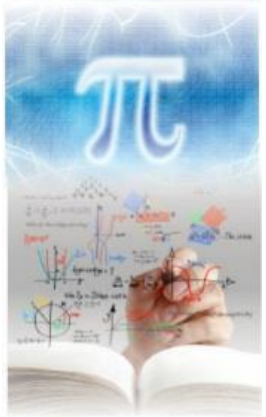
Ejemplos:

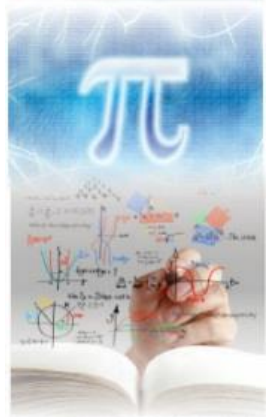
- $\log_5(x-2) \leq \log_5(4-x)$
- $\log_2(2x-1) < -1$
- $\log_3 x \geq 5-x$

Para su resolución, se debe tener en cuenta los pasos siguientes:

Paso1	Garantizar la existencia de los logaritmos en los reales $\log_b A \in \mathbb{R} \leftrightarrow b > 0 \ \wedge b \neq 1 \wedge A > 0$
Paso2	Despejar x: Si $b > 1$: $\log_b x < \log_b y \leftrightarrow x < y$ Si $0 < b < 1$: $\log_b x < \log_b y \leftrightarrow x > y$
Paso3	Intersectar los resultados anteriores

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

LOGARITMOS

1. Indique el número de soluciones de

$\log_{\sqrt{x-7}} \sqrt{x^2+x} = 2$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 3 E) 4

SOLUCION

Restricciones:

$x^2 + x \geq 0 \wedge x - 7 > 0 \wedge x - 7 \neq 1$

$(x \leq -1 \vee x \geq 0) \wedge x > 7 \wedge x \neq 8$

$x > 7 \wedge x \neq 8 \ldots\ldots (U)$

Por definición:

$$(\sqrt{x-7})^2 = \sqrt{x^2+x}$$

$x-7=\sqrt{x^2+x} \rightarrow x^2 - 14x + 49 = x^2 + x$

$\rightarrow x = \frac{49}{15}$

$\rightarrow x \in \emptyset$

$\therefore n(C.S) = 0$

LOGARITMOS

2. Halle $\frac{m}{n}$ si

$\log_3 n = \log_6 m = \log_{12}(m+n)$

A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}$

D) $1-\sqrt{5}$ E) $1+\sqrt{5}$

SOLUCION Igualando a una constante k

$$\log_3 n = k \wedge \log_6 m = k \wedge \log_{12}(m+n) = k$$

Por definición: $n = 3^k \wedge m = 6^k \wedge m+n = 12^k$

Luego: $3^k + 6^k = 12^k$

$\div 3^k$: $1 + 2^k = 4^k$

Luego: $4^k - 2^k - 1 = 0$

$$\rightarrow 2^k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$2^k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad 2^k = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (no\ cumple)$$

Pero: $\frac{m}{n} = \frac{6^k}{3^k} = 2^k$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

LOGARITMOS

3. Sea f una función cuya regla de correspondencia está dado por

$f_{(x)} = \log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Encuentre su función inversa.

A) $a^x + a^{-x}$ B) $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$ C) $a^x - a^{-x}$

D) $\frac{a^x - a^{-x}}{2}$ E) $\frac{a^x}{2}$

UNI 2015-I

SOLUCION

Analizando el dominio:

$$x > 0$$

Luego:

$$y = \log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Por definición:

$$a^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

Despejando x en f(y)

$$a^y - x = \sqrt{x^2+1}$$

Al cuadrado:

$$a^{2y} - 2a^y x + x^2 = x^2 + 1$$

$$a^{2y} - 2a^y x = 1$$

De donde:

$$x = \frac{a^{2y}-1}{2a^y}$$

Luego:

$$x = \frac{a^y - a^{-y}}{2}$$

Finalmente:

$$f^*(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$$

LOGARITMOS

4. Resuelva la inecuación logarítmica

$$\log_{1-n}\left(\frac{x}{|x|+1}\right) \leq \log_{1-n}\left(\frac{2}{x}\right);\ n \in \langle 0;1\rangle$$

A) $[1+\sqrt{3};\ +\infty\rangle$

B) $\langle 1;\ +\infty\rangle$

C) $\langle \sqrt{2};+\infty\rangle$

D) $[1+\sqrt{2};5\sqrt{2}\rangle$

E) $[1+\sqrt{2};+\infty\rangle$

SOLUCION

Por dato:

0<n<1

$$\rightarrow 0 > -n > -1$$

$$1 > 1 - n > 0$$

Luego la base del logaritmo esta entre 0 y 1

$$\log_{1-n}\left(\frac{x}{|x|+1}\right) \leq \log_{1-n}\left(\frac{2}{x}\right)$$

Restricción:

x>0

Por teorema:

$$\frac{x}{|x|+1} \geq \frac{2}{x}$$

Resolviendo:

$$x^2 \geq 2|x| + 2$$

$$x^2 - 2|x| - 2 \geq 0$$

Recordar:

$$x^2 = |x|^2$$

$$\rightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 3$$

$$(|x| - 1)^2 \geq 3$$

$$|x|-1 \leq -\sqrt{3} \vee |x| - 1 \geq \sqrt{3}$$

$$|x| \leq 1 - \sqrt{3} \vee |x| \geq 1 + \sqrt{3}$$

$$(x \in \emptyset) \vee (x \leq -1 - \sqrt{3} \vee x \geq 1 + \sqrt{3})$$

Pero x>0

Finalmente: $x \geq 1 + \sqrt{3}$

$$\therefore C.S = [1 + \sqrt{3}; +\infty >$$

LOGARITMOS

5. Calcule el rango de la función

$P_{(x)} = 2^{\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x};\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

A) $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$ B) $\left[\frac{1}{2}; 8\right\rangle$ C) $\left[\frac{1}{8}; 8\right\rangle$

D) $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ E) $\left\langle\frac{1}{2}; 2\right\rangle$

SOLUCION

Se sabe que $\forall\, x \in R.\, se\ cumple$:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq aSenx + bCosx \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

En el problema:

$$-\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} \leq \sqrt{3}Cosx + 1Senx \leq \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$$

$$-2 \leq \sqrt{3}Cos + Senx \leq 2$$

Tomando exponencial en base 2:

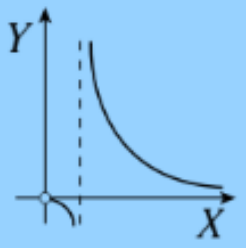
$$2^{-2} \leq 2^{\sqrt{3}Cosx+Senx} \leq 2^2$$

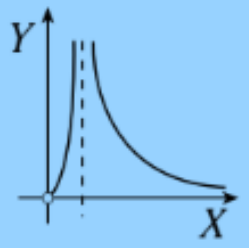
$$\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 4$$

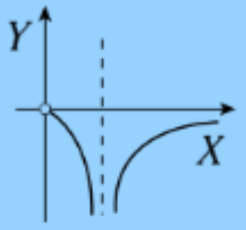
$$\therefore Ran(f) = [\frac{1}{4}; 4]$$

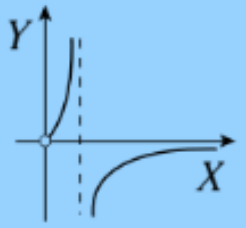
LOGARITMOS

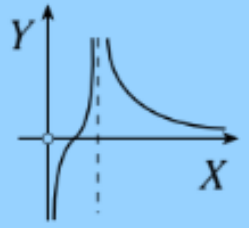
6. Grafique $f:\mathbb{R}^+-\{1\}\to\mathbb{R}/\ f_{(x)}=\log_x 3$

A) 

B) 

C) 

D) 

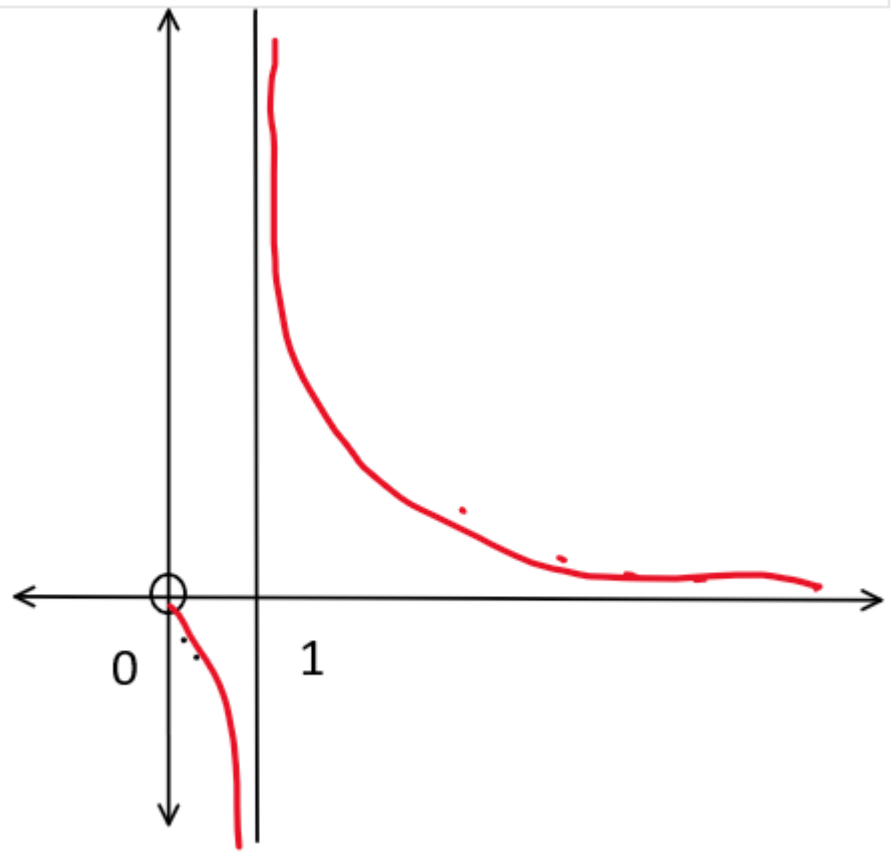
E) 

SOLUCION

Restricciones: x>0∧ $x \neq 1$

Entonces en x=1 (Asíntota Vertical)

x	y
1/3	-1
1/9	-1/2
1/27	-1/3
3	1
9	1/2
27	1/ 3



LOGARITMOS

7. Determine un intervalo solución

$$\frac{9^x - 4\cdot 3^x - 5}{x^2 - x - 6} \leq 0$$

A) $\langle -\infty; -1\rangle - \{-2\}$

B) $\langle 3; +\infty\rangle$

C) $\langle -2; \log_3 5]$

D) $[\log_3 5; +\infty\rangle - \{3\}$

E) $[\log_3 5; 3\rangle$

SOLUCION

$$\frac{9^x - 4.3^x - 5}{x^2 - x - 6} \leq 0 \qquad \text{Luego:} \qquad \frac{3^x - 5}{(x-3)(x+2)} \leq 0$$

Factorizando:

$$\frac{(3^x - 5)(3^x + 1)}{(x-3)(x+2)} \leq 0$$

Nota: si: $\frac{a}{b} \leq 0 \rightarrow (a \leq 0 \wedge b > 0) \vee (a \geq 0 \wedge b < 0)$

Aplicando en el problema:

$3^x - 5 \leq 0 \wedge (x-3)(x+2) > 0 \quad \vee \quad 3^x - 5 \geq 0 \wedge (x-3)(x+2) < 0$

$x \leq \log_3 5 \wedge (x < -2 \vee x > 3) \quad \vee \quad x \geq \log_3 5 \wedge (-2 < x < 3)$

$x \leq 1{,}46 \wedge (x < -2 \vee x > 3) \quad \vee \quad x \geq 1{,}46 \wedge (-2 < x < 3)$

$x < -2 \quad \vee \quad \log_3 5 \leq x < 3$

LOGARITMOS

8. Encuentre el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}[\ln(9-x^2)]}$$

A) $\langle -3; 3\rangle$

B) $\langle -2\sqrt{2}; -\sqrt{9-e}\,] \cup [\sqrt{9-e}; 2\sqrt{2}\rangle$

C) $\langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\rangle$

D) $\langle -2\sqrt{2}; -\sqrt{9-e}\rangle \cup \langle \sqrt{9-e}; 2\sqrt{2}\rangle$

E) $\langle \sqrt{9-e}; 3\rangle$

SOLUCION

$$Dom(f)=\{x/9-x^2>0 \wedge Ln(9-x^2) > 0 \wedge \log_{\frac{1}{2}}(\ln(9-x^2)) \geq 0\}$$

$$x^2 < 9 \wedge Ln(9-x^2) > Ln(1) \wedge \log_{\frac{1}{2}}(\ln(9-x^2)) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$-3<x<3 \quad \wedge \quad 9-x^2 > 1 \quad \wedge \quad Ln(9-x^2) \leq 1$

$x^2 < 8 \quad \wedge \quad Ln(9-x^2) \leq Lne$

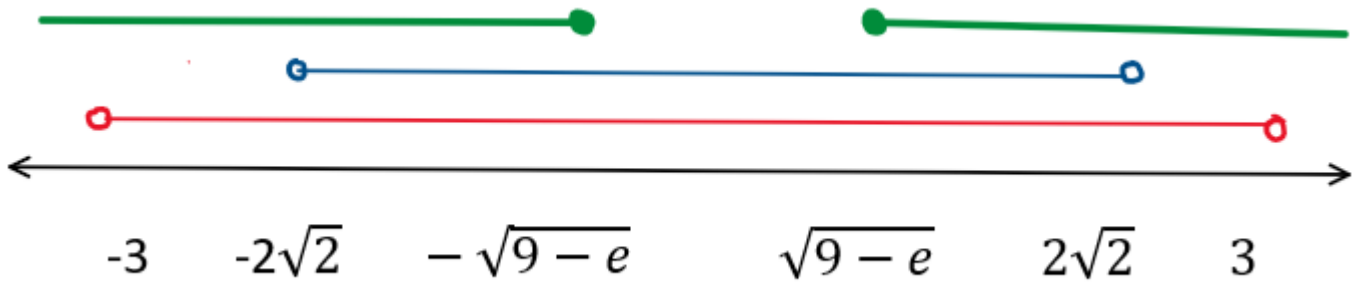
$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$

$9-x^2 \leq e$

$x^2 \geq 9-e$

$x \leq -\sqrt{9-e} \vee x \geq \sqrt{9-e}$

Intersectando:



$$\therefore Dom(f) =< -2\sqrt{2}; -\sqrt{9-e}] \cup [\sqrt{9-e}; 2\sqrt{2} >$$

LOGARITMOS

9. Si $\log_3^2 5 + 1 = x \log_3 5$,

calcule $A = \dfrac{x^3 - 3x}{\log_3^3 5 + \log_5^3 3}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

SOLUCION

Del dato:

$$\log_3 5 + \frac{1}{\log_3 5} = x$$

$$\log_3 5 + \log_5 3 = x$$

Al cubo:

$$(\log_3 5 + \log_5 3)^3 = x^3$$

$$(\log_3 5)^3 + (\log_5 3)^3 + 3 \log_3 5 \log_5 3 (\log_3 5 + \log_5 3) = x^3$$

(1) x

$$(\log_3 5)^3 + (\log_5 3)^3 + 3x = x^3 \rightarrow \quad x^3 - 3x = (\log_3 5)^3 + (\log_5 3)^3$$

$$\frac{x^3 - 3x}{(\log_3 5)^3 + (\log_5 3)^3} = 1$$

LOGARITMOS

10. Calcule la suma de las soluciones que presenta la ecuación $x^{5\log e+\log x}=e^{-6\log e}$

A) $e^{-3}(1+e)$

B) 6

C) $\log_e^{-3}(1+\log e)$

D) $\log_6 e$

E) $e^{-2}(1+e^2)$

SOLUCION

x > 0 .....(U)

Tomando log en base 10

$$\log(x^{5\log e+\log x}) = \log(e^{-6\log e})$$

(5loge+logx)logx =-6loge(loge)

$$(\log x)^2 + 5\log e\log x + 6(\log e)^2 = 0$$

Factorizando por aspa simple:

(logx+3loge)(logx+2loge)=0

Igualando a cero cada factor:

Logx =-3loge v logx =-2loge

Logx=$\log e^{-3}$ V logx=$\log e^{-2}$

LOGARITMOS

11. Al resolver la inecuación
$(\log_2 x - \log_3 x)(x-2) < 0$
se obtiene como conjunto solución a $\langle \ln a; \ln b \rangle$.
Calcule ab.

A) e^4 B) e^{-1} C) e^3
D) e^2 E) e^{-2}

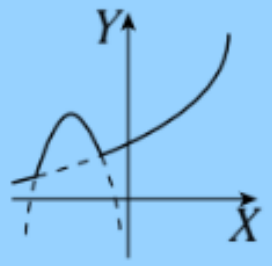
SOLUCION

LOGARITMOS

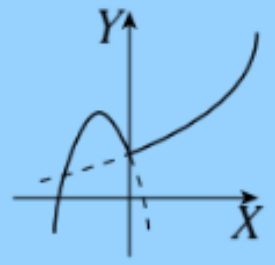
12. Esboce la gráfica de la función

$f_{(x)} = \text{máx}\{\pi^x; 5-(x+2)^2\}$

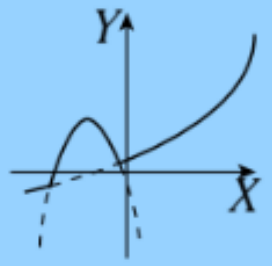
A)



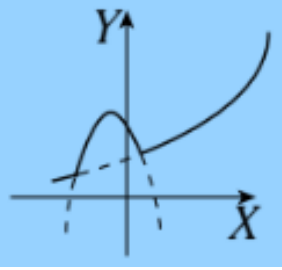
B)



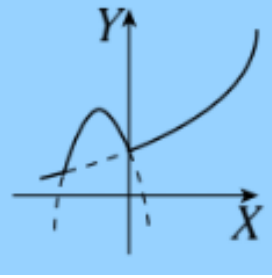
C)



D)



E)



SOLUCION

LOGARITMOS

13. Calcule la función inversa de $f_{(x)}=4^x+2^{x+1}$

A) $f^*_{(x)}=\log_2\left(\sqrt{x-1}+1\right);\ x>1$

B) $f^*_{(x)}=\log_2\left(\sqrt{x+1}+1\right);\ x>0$

C) $f^*_{(x)}=\log_2\left(\sqrt{x-1}-1\right);\ x>1$

D) $f^*_{(x)}=\log_2\left(\sqrt{x-1}-1\right);\ x>1$

E) $f^*_{(x)}=\log_2\left(\sqrt{x+1}-1\right);\ x>0$

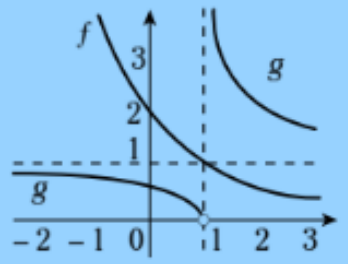
SOLUCION

LOGARITMOS

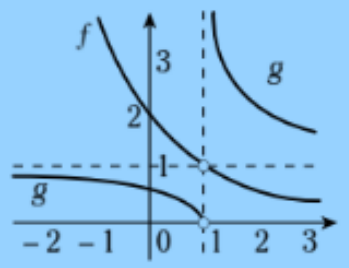
14. Diga cuál de las siguientes gráficas representa aproximadamente a las funciones $f; g: \mathbb{R}-\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$f_{(x)}=2^{-x+1}$ y $g_{(x)}=2^{\frac{1}{x-1}}$

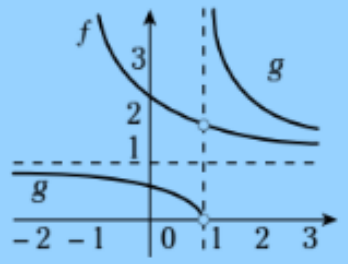
A)



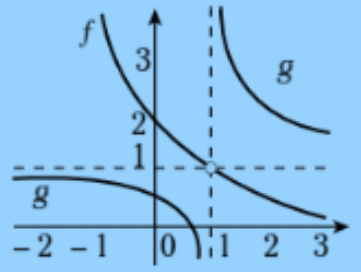
B)



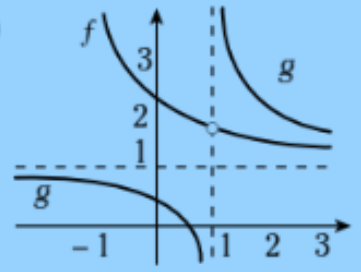
C)



D)



E)



SOLUCION

LOGARITMOS

15. Resuelva la inecuación

$$\left[3^{-x} - \log_3(-x)\right]\left(2^x - 2x - 1/3\right) > 0$$

A) $\langle -\infty; 0\rangle$
B) $\langle -\infty; -1\rangle$
C) $\mathbb{R}$
D) $\mathbb{R}_0^-$
E) $\langle -\infty; -2\rangle$

SOLUCION

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS